Übungsblatt 11 zu Analysis und Lineare Algebra II (Physik)

Aufgabe 95: (10 Punkte)

a) Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ und A^* die adjungierte Matrix; zeige, daß $e^{(A^*)} = (e^A)^*$ gilt.

b) Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ selbstadjungiert. Zeige, daß e^{iA} unitär ist.

Aufgabe 96: (10 Punkte)
Zeige, daß es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{6} & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

gibt. Gibt es $B, C \in M_3(\mathbb{R})$ mit $A = B^2 = C^3$? Gibt es $B, C \in M_3(\mathbb{C})$ mit $A = B^2 = C^3$?

Aufgabe 97: (10 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $O(n) := \{M \in GL(n, \mathbb{R}) : M \textit{ ist orthogonal}\}$.

Es sei außerdem $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in O(n)$.

Zeige:

a) $a_{21} = a_{31} = ... = a_{n1} = 0$

b) $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in O(n-1)$

Aufgabe 98: (10 Punkte)
Es sei V ein $n-$dimensionaler $\mathbb{C}-$Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_n)$ seien Orthonormalbasen von V. Zeige, daß die darstellende Matrix $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id_V})$ des „Koordinatenwechsels“ von der Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ zur Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ eine unitäre Matrix ist.

Abgabe in Zweier- oder Dreiergruppen bis Mittwoch 12.7.2023 16 Uhr über Moodle