Tutorium 7 zu Analysis und Lineare Algebra II

Aufgabe 1:

Das Vektorprodukt $\begin{array}{rcl} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\underline{x}, \underline{y}) & \mapsto & \underline{x} \times \underline{y} \end{array}$ in $\mathbb{R}^3$ ist für $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ – bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ – definiert wie folgt:

$$\underline{x} \times \underline{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Zeige, daß für beliebige Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ folgendes gilt ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ steht für das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$) :

(a) $\det(\underline{a}|\underline{b}|\underline{c}) = \langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle$.

(b) $\underline{a} \times \underline{b}$ ist orthogonal zu $\mathrm{lin}\{\underline{a}, \underline{b}\}$.

(c) Falls $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ orthogonale Einheitsvektoren sind, dann bilden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2:
Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f : \{(\underline{u}, \underline{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|\underline{u}\| = \|\underline{v}\| = 1, \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0\} & \longrightarrow & SO(3) \\ (\underline{u}, \underline{v}) & \longmapsto & (\underline{u}|\underline{v}|\underline{u} \times \underline{v}) \end{array}$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Aufgabe 3:
Zeige, daß unabhängig vom Verlauf eines Fußballspiels mindestens zwei Punkte auf der Oberfläche des verwendeten Fußballs existieren, die sich zum Anpfiff der ersten Halbzeit und zum Anpfiff der zweiten Halbzeit an exakt der gleichen Stelle im umgebenden Raum befinden.