Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (F22T1A4)
$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bezeichne die offene Einheitskreisscheibe.

a) Es sei $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, daß für das Residuum der Ableitung f' im Nullpunkt $\text{Res}(f', 0) = 0$ gilt.

b) Es sei f eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion. Für die Ableitung f' von f gelte die Abschätzung

$$|f'(z) - ze^z| < \frac{1}{2}e^{\text{Re}\,(z)} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}, |z| = \frac{1}{2}.$$

Begründen sie, weshalb f dann nicht injektiv sein kann.

Aufgabe 26: (F16T1A1)

a) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, welche in den Punkten -1 und 1 wesentliche Singularitäten mit den Residuen

$$\text{Res}(f, -1) = -1, \quad \text{Res}(f, 1) = 1$$

besitzt. Ist f durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt?

b) Sei f die in (a) gefundene Funktion. Für $\alpha \in [0, \infty[$ sei γ_α der geschlossene Weg, der die Punkte

$$2 + \alpha i, -2 - i, -2 + i.2 - \alpha i, 2 + \alpha i$$

in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet. Für welche Werte von α ist das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_\alpha} f(z)dz$$

definiert? Berechnen Sie das Integral für diese Werte von α.

Aufgabe 27: (H15T3A1) Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -1 + i\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z}{(z^2 + z)(z + 1 - i)^2} \end{aligned}$$

$\gamma(r)$ bezeichne den Weg entlang der Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius $r > 0$ mit einem Umlauf in positiver Richtung. Bestimmen Sie für alle Werte $r \in \mathbb{R}^+\backslash\{1, \sqrt{2}\}$ den Wert des Integrals

$$W(r) := \int_{\gamma(r)} f(z)dz$$