

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 22: (F12T3A1)

Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ist:
 $t \mapsto 2e^{it}$

a)
$$\int_{\gamma} \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz$$

b)
$$\int_{\gamma} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz$$

c)
$$\int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{(z - 1)^2} dz.$$

Aufgabe 23: (H13T3A3)

Sei $a > 0$ und sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \frac{\cos(x)}{a^2 + x^2}$

a) Zeigen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$$

Aufgabe 24: (F14T3A3)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{r^2}{1 + r^4} dr$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3x}{1 + |x|^4}.$$

Dabei bezeichnet $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ die euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^3$.