

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 19: (H16T1A2)

Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f im Komplexen den Typ und berechnen Sie das Integral $\int_{|z|=4} f(z)dz$ für

a) $f(z) = \frac{\sin(z)}{e^z - e^\pi}$

b) $f(z) = \sin\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$

Aufgabe 20: (F18T3A3)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i, 0\} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \frac{(z+i)^2}{(z^2+1)^2} + e^{-\frac{1}{z^2}}$.

- (a) Bestimmen Sie für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und geben Sie den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung in einer punktierten Umgebung für jede der isolierten Singularitäten an.
- (b) Zeigen Sie, daß f eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{i, -i, 0\}$ besitzt.

Aufgabe 21: (H11T2A3)

- a) Sei h in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph mit $h(z_0) \neq 0$ und sei eine meromorphe Funktion F durch $F(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^3}$ gegeben. Berechnen Sie das Residuum von F in z_0 .
- b) Klassifizieren Sie für die Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3} \quad \text{und} \quad g(z) = \exp\left(\exp\left(-\frac{1}{z}\right)\right)$$

alle isolierten Singularitäten in \mathbb{C} .

- c) Berechnen Sie mit der Funktion f aus (b) das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$