Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 16: (F12T3A2)
Sei $\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{C}\backslash\{1,2\} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \frac{1}{(z-1)(2-z)} \end{array}$.

a) Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

b) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

c) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

d) Zwei reelle Zahlen $a \neq b$ erfüllen $1 < a, b < 2$. Betrachten Sie die Ellipse $E = \gamma([0, 2\pi])$, wobei $\begin{array}{rrcl} \gamma: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & a\cos(t) + ib\sin(t) \end{array}$ ist. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

Aufgabe 17: (H14T3A3)
Gegeben sei eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ mit einer Nullstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ in z_0 durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung der Funktion $\frac{1}{f}$ um z_0 an.

b) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurent-Entwicklung der Funktion $z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ jeweils um $z_0 = 0$ und $z_0 = \pi$.

c) Sei Γ die Kreislinie $|z - \frac{3}{2}| = 2$ orientiert im positiven Sinn. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sin(z)}$$

Aufgabe 18: (H18T2A2)

a) (i) Zeigen Sie, daß die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \tag{1}$$

absolut konvergiert für jedes $z \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : z \mapsto f(z)$, die so entsteht, stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Geben Sie (ohne Beweis) die größte offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ an. so daß die Funktion f durch (1) auf U definiert und dort holomorph ist.

b) Die komplexen Zahlen $a_1, ..., a_n$ (mit $n \geq 1$) erfüllen $|a_1| = ... = |a_n| = 1$. Zeigen Sie, daß es einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gibt, so daß das Produkt der Abstände zwischen z und a_j für $j = 1, ..., n$ mindestens 1 ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(z) := (z - a_1) \cdots (z - a_n)$.