Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (F22T2A4)
Entscheiden und begründen Sie für jede Teilaufgabe (a) bis (c) jeweils, ob es Paare ganzer Funktionen (f, g) mit der genannten Eigenschaft bzw. den genannten Eigenschaften gibt. Falls ja, ist eine Charakterisierung solcher Funktionenpare anzugeben.

a) $f^2 - fg = 0$.

b) $\max\{|f|, |g|\} \leq 1$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $f(0) = 3 + g(0)$.

c) f hat keine Nullstelle, $g(0) = 0$ und $|g - f| < |f|$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Aufgabe 14: (F22T2A5)

a) Erklären Sie, daß der Cauchysche Integralsatz einen Spezialfall des Residuensatz darstellt.

b) Entscheiden und begründen Sie, ob es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit einfachem Pol in 0 und Residuum $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$ gibt. Begründen Sie, wie sich der Sachverhalt ändert, wenn der Pol von f von zweiter anstatt erster Ordnung ist.

c) Bestimmen Sie für jedes $r > 0$ den Wert des Integrals

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{\sin(z)}{z^4} dz.$$

Aufgabe 12: (H18T1A1)

a) Bestimmen Sie die Menge $K \subseteq \mathbb{R}$, die genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$ enthält, für welche die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}}$ gegen eine reelle Zahl lonvergiert.

b) Für $a \in \mathbb{C}$ bezeichne $\gamma_a : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & a + 2e^{it} \end{array}$. Bestimmen Sie den Wert des komplexen Wegintegrals

$$\int\limits_{\gamma_a} \frac{1 - 2z^2}{z^3} dz$$

für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 2$.