Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 10: (F22T1A5)
$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bezeichne die offene Einheitskreisscheibe.

a) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante Funktion, die unendlich viele Nullstellen in der punktierten Kreisscheibe $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ besitzt. Zeigen Sie, daß die Singularität von f in $z = 0$ wesentlich ist.

b) Zeigen Sie, daß jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) \cdot ((f \circ f)(z) - 1) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}$$

konstant ist.

Aufgabe 11: (F10T2A1)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel

a) Wenn $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist, dann ist f konstant.

b) Wenn $f(\frac{1}{n}) = \frac{i}{n}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $f(z) = iz$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Wenn f eine nichtkonstante Polynomfunktion ist, dann gibt es eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i$.

d) Die Funktion $\frac{1}{f}$ hat in 0 keinen Pol.

e) Die Funktion $\begin{array}{rcl}]0,\infty[& \to & \mathbb{C} \\ r & \mapsto & \displaystyle\int_{|z|=r} f(z)dz \end{array}$ ist konstant.

f) Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1)(z-1)^n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 12: (F17T1A3)

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(1) = \pi$ und $f'(z) = |z|f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

b) Zeigen Sie, daß es höchstens eine ganze Funktion f mit $f(0) = 2 + 3i$ gibt, so daß

$$f'(z) = \sin(z)f(z) + e^{z^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$