Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 7: (F08T3A3)
Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und es gelte $|f(z)| \geq |e^z|$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Man zeige, daß f in allen Punkten aus $\mathbb{Z}$ holomorph ergänzbar ist und daß $f(z) = Ce^z$ mit einer Konstanten C gilt.

Aufgabe 8: (H20T2A5)
Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die Aussage: Die konstante Funktion $\begin{aligned} h : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto 1 \end{aligned}$
ist die einzige unter den holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

a) $f\left(\exp\left(\frac{\pi i n}{2020}\right)\right) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $f(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

c) $f\left(\exp\left(\frac{in}{2020}\right)\right) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 9: (H20T3A2)

a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
Hinweis: Überlegen Sie zunächst, warum die Singularität bei $z = 0$ hebbar ist.

b) Es sei $\operatorname{Log} : \mathbb{C}\backslash\,]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe von Log mit Entwicklungspunkt $e^{\frac{3\pi i}{4}}$.