Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 4: (F18T1A3)
Wie üblich identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch die $\mathbb{R}-$lineare Abbildung $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array}$.

Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{z^4}\right) & \text{falls } z \neq 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist und daß f in $(0,0)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

b) Zeigen Sie, daß f in $z = 0$ nicht komplex differenzierbar ist. Begründen Sie, warum dies nicht im Widerspruch zum Ergebnis von Teil (a) steht.

Aufgabe 5: (F13T1A1)

a) Bestimmen Sie explizit alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z) - 3| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) Gibt es eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung der 0, so daß $f^{(n)}(0) = n^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?

Aufgabe 6: (H17T1A1)

a) Ist die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| + \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$? Falls ja, bestimmen Sie, ob A kompakt ist.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2} z^n$$

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Es seien C^1-Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Bestimmen Sie, ob die Funktionen $g(x,y) := e^{u(x,y)} \cos(v(x,y))$ und $h(x,y) = e^{u(x,y)} \sin(v(x,y))$ für $x + iy \in \Omega$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen oder nicht.