Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 37: (F22T1A2)

a) Geben Sie eine mathematisch präzise Definition für die Stabilität einer Ruhelage x_0 einer autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ mit stetig differenzierbarer rechter Seite $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Im Folgenden betrachten wir die skalare autonome Differentialgleichung $x' = x\sin(x)$.

b) Geben Sie die Ruhelagen der Differentialgleichung an und entscheiden Sie, welche der Ruhelagen $\neq 0$ stabil sind.

c) Es sei ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < x_0 < \pi$ gegeben. Zeigen Sie, daß es eine eindeutige maximale Lösung x der Differentialgleichung mit $x(0) = x_0$ gibt, daß diese auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, streng monoton steigt und daß $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \pi$ gilt.

d) Begründen Sie zB. mithilfe von (a) und (c), daß die Ruhelage 0 der Differentialgleichung instabil ist.

Aufgabe 38: (F22T2A3) Es sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \sin(tx(t)), \qquad x(0) = \xi$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$ gegeben. Beweisen Sie die beiden Aussagen (a) und (b) und geben Sie eine begründete Antwort auf die Frage in (c).

a) Das Anfangswertproblem besitzt für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $x_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ ist die Lösung x_ξ eine gerade Funktion, dh. $x_\xi(t) = x_\xi(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

c) Nimmt die Lösung x_π zum Anfangswert $\xi = \pi$ negative Werte an?

Aufgabe 39: (F22T3A5)

a) Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Im Folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen mit $g_1 \geq g_2 \geq ..$ und $f_1 \leq f_2 \leq ....$ Beweisen Sie die folgenden Aussagen (b) und (c).

b) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$ mit $g_n(x_n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $g_n(x_0) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so ist diese Konvergenz sogar gleichmäßig.
Hinweis: Widerspruchsbeweis mit Hilfe von Teil (b).