Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (F22T1A1)

a) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(0) = 0 < f''(0)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi > 0$ mit $f'(\xi) = 0$.

b) Es sei $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergiert. Zudem sei

$$F_n(x) := \int_0^x f_n(t)dt$$

für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie kurz, daß die Integralfunktion

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt$$

auf $[0,1]$ wohldefiniert ist, und zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen F konvergiert.

Aufgabe 35: (F22T2A1)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen korrekt sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort durch einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) Es gibt eine Funktion $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, die nur in genau einem Punkt stetig ist.

b) Ist $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\sup\limits_{x\in]0,1[} |f'(x)| < \infty$, dann ist f beschränkt und gleichmäßig stetig.

c) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = x^n(1 - x^{2n})$ für $x \in [0,1]$ konvergiert gleichmäßig.

Aufgabe 36: (F22T3A1)
Es sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$. Entscheiden Sie jeweils, ob die Funktion f auf den Mengen

a) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,

b) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x) + \sin(y) = 1\}$,

c) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \frac{1}{x}\}$

ein globales Minimum und ein globales Maximum besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Minimal- bzw. Maximalstellen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.