

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 31: (F22T3A3)

- a) Begründen Sie, daß der offene dritte Quadrant in der komplexen Ebene, dh.

$$Q_3 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x < 0, y < 0\}$$

zu keiner der Mengen

$$E_1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : xy > 0\}, \quad E_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}, \quad E_3 = \mathbb{C}$$

konform äquivalent ist (dh. es existiert keine biholomorphe Abbildung $Q_3 \rightarrow E_j$ für $j = 1, 2, 3$).

- b) Zeigen Sie, daß es keine zwei holomorphen Funktionen $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, derart daß $g(\mathbb{C}) \setminus h(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$.

Aufgabe 32: (H18T3A2)

- a) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := \frac{3z+1}{z+1}$. Bestimmen Sie das Bild von $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ unter f .
- b) Es seien $B_2(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 2\}$ und $G := \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, x < 0\}$. Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung $g : B_2(1) \rightarrow G$.
- c) Zeigen oder widerlegen Sie, daß es eine biholomorphe Abbildung

$$h : \mathbb{C} \setminus \{x + iy : y = 0, x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[\} \rightarrow B_1(0)$$

gibt.

Aufgabe 33: (F18T2A1)

- a) Wir betrachten die beiden Gebiete

$$\Omega_1 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0\}$$

und

$$\Omega_2 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}$$

- (1) Zeigen Sie, daß eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ existiert.
- (2) Geben Sie eine solche Abbildung explizit an.

- b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten) des Polynpms

$$z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$$

in dem Kreisring $K_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.