

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (H20T1A3)

a) Begründen Sie, daß das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos(\theta) + \sin(\theta)}$$

existiert.

b) Bestimmen Sie den Wert dieses Integrals.

Aufgabe 29: (H20T2A4)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$. Bestimmen Sie

$$z \mapsto \frac{1}{1+z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\sin(z-1)}{z-1}$$

a) bei 1

b) bei -1

c) bei 0.

jeweils den Typ der isolierten Singularität von f und berechnen Sie das Residuum.

Aufgabe 30: (F19T2A2)

Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
 $z \mapsto 4z + z^2 + e^z$.

a) Zeigen Sie, daß f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ genau eine einfache Nullstelle besitzt.

b) Zeigen Sie, daß es für $f|_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ keinen holomorphen Logarithmuszweig – also kein holomorphes $l : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $e^{l(z)} = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ – gibt.

c) Zeigen Sie, daß es für $f|_{\mathbb{E}}$ keinen holomorphen Zweig der dritten Wurzel – also kein holomorphes $w : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $(w(z))^3 = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ – gibt.