Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 20: (F22T1A3)

a) Bestimmen Sie explizit die Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = \pi \cos(t)(1 + x^2(t)), \qquad x(0) = 0$$

und deren maximales Existenzintervall.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit

$$\langle f(x), x \rangle = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } f(0) = 0.$$

(Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.)
Zeigen Sie, daß für jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ der autonomes Differentialgleichung $x' = f(x)$ die euklidische Norm $t \mapsto \|x(t)\|$ konstant ist und daß die Ruhelage 0 dieser Differentialgleichung stabil ist.

Aufgabe 21: (F22T2A2) Man betrachte das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= 1 - x - Rxy \\ y' &= Rxy - y \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von R alle stationären Punkte des Systems, die im abgeschlossenen ersten Quadranten, dh. in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ liegen.

b) Linearisieren Sie das Systems jeweils um die in (a) bestimmten Ruhelagen und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

Aufgabe 22: (F22T3A2)

a) Bestimmen Sie für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung $y :]a, b[\to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = 3t^2 y^2, \qquad y(0) = y_0$$

auf dem größtmöglichen Existenzintervall $]a, b[$ (in Abhängigkeit von y_0), wobei $a < 0 < b$.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem aus reellwertigen Funktionen der Differentialgleichung

$$u''' + 4u' = 0.$$

Aufgabe 23: (F22T3A4)
Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a(\cos(x) - 1) \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, daß es für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein $T > 0$ gibt, so daß die Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ eine eindeutige Lösung auf dem Zeitintervall $]0, T[$ hat.

b) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, ob die Ruhelage $\binom{0}{0}$ stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist.