Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 12: (F16T3A2)

a) Zeigen Sie, daß $\begin{array}{rcl} [0,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+x^3} \end{array}$ integrierbar ist.

b) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \frac{x}{1+x^3}dx$ unter Verwendung eines geschlossenen Weges, der durch 0, R und $Re^{\frac{2\pi i}{3}}$ geht.

Aufgabe 13: (F07T1A5) Es sei $f := \frac{p}{q}$ eine rationale Funktion und es sei der Grad des Nennerpolynoms q um 2 größer als der Grad des Zählerpolynoms p. Zeigen Sie, daß die Summe der Residuen von f verschwindet, dh.

$$\sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(f,a) = 0.$$

Aufgabe 14: (F15T3A4)
Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

a) Es sei $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol 1. Ordnung in 0. Weiter seien $\alpha \in]0, 2\pi[$, $\varepsilon > 0$ und $\begin{array}{rcl} \gamma_\varepsilon : [0,\alpha] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \varepsilon e^{it} \end{array}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(\xi)d\xi = i\alpha \operatorname{Res}(f,0).$$

b) Die stetige Funktion $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ sei holomorph in $\mathbb{D}$. Ferner seien $m_1, m_2 \in]0,\infty[$, derart, daß für alle $\xi \in \partial\mathbb{D}$ gilt:

$$|f(\xi)| \le m_1 \text{ für } \operatorname{Im}(\xi) \ge 0 \quad \text{und} \quad |f(\xi)| \le m_2 \text{ für } \operatorname{Im}(\xi) \le 0.$$

Beweisen Sie, daß $|f(0)| \le \sqrt{m_1 m_2}$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(z)f(-z)$.

Aufgabe 15: (H18T2A3)

a) Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ erfüllt $a > 1$. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$ze^{a-z} = 1$$

genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ besitzt und diese Lösung reell und positiv ist.

b) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int\limits_0^\pi \frac{1}{3+2\cos(\theta)}d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

Aufgabe 16: (F03T1A3)

a) Formulieren Sie den Residuensatz für den Spezialfall einer Funktion, die nur im Nullpunkt eine Singularität hat.

b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_{|z|=r} [\sin(\frac{1}{z})]^n$ für beliebiges $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 17: (F19T1A1)

a) Es sei

$$P(z) := 2019z^{2019} + \sum_{k=0}^{2018} a_k z^k,$$

wobei $a_k \in \mathbb{C}$, $|a_k| < 1$ für alle $k = 0, ..., 2018$ gelte. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von P in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mit Berücksichtigung der Vielfachheiten gezählt.

b) Formulieren Sie für den Spezialfall holomorpher Funktionen das Argumentprinzip (auch als Satz vom nullstellenzählenden Integral bekannt).

c) Es sei P wie in (a) definiert. Zeigen Sie

$$\exp\left(\frac{1}{673}\int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{P'(z)}{P(z)}dz\right) = 1$$

Hierbei bezeichnet $\partial\mathcal{D}$ die einmal im mathematisch positiven Sinne durchlaufene Einheitskreislinie.

Aufgabe 18: (H03T3A2)

a) Zeigen Sie, daß alle Nullstellen des Polynoms $P(z) = 3z^3 + z + i$ in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe liegen.

b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{e^{iz}}{3z^3 + z + i}dz$

c) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \backslash \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Gibt es eine holomorphe Abbildung $h : D \to \mathbb{C}$ derart, daß $P(z) = e^{h(z)}$ für alle $z \in D$ gilt?

Aufgabe 19: (H17T3A1)

Es sei $\Omega := \mathbb{C}\backslash[-1, 1] = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 1, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Auf Ω existiert keine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, dh. es gibt keine holomorphe Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = f(z)$ für alle $z \in \Omega$.

b) Auf Ω existiert eine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $z \mapsto h(z) = i\frac{z+1}{z-1}$, dh. es gibt eine holomorphe Funktion $w : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^{w(z)} = h(z)$ für alle $z \in \Omega$.