Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H03T3A1) Bestimmen Sie diejenige holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die die harmonische Funktion $u(x, y) = x^3y - xy^3$ als Realteil hat und die Bedingung $f(0) = 3i$ derfüllt. Drücken Sie f als Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ aus.

Aufgabe 2: (F12T1A2) Drei Fragen zur Funktionentheorie:

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$, so daß $f(\frac{1}{2}) = 2$ ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so daß für alle $x + iy \in \mathbb{C}$ gilt: $(\operatorname{Im} g)(x + iy) = x^2 - y^2$?

c) Gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $h^{(n)}(0) = (-1)^n(2n)!$

Aufgabe 3: (H14T1A1)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein nichtleeres Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ und $g : G \to \mathbb{C}$ seien holomorph mit $f' = gf$. Zeigen Sie: Hat f eine Nullstelle in G, so ist $f(z) = 0$ für alle $z \in G$.

Aufgabe 4: (H11T2A2) Beantworten Sie die folgenden zwei Fragen zur Funktionentheorie jeweils mit einer kurzen Begründung.

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(n)}(0) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Welchen Wert besitzt das Kurvenintegral $\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=R} \frac{f(z)}{z-1} dz$ für $R > 0$, wobei $|z - 1| = R$ den positiv durchlaufenen Kreis um 1 mit Radius R bezeichnet?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{n}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 5: (F19T1A5)

a) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 = 1 + i$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

b) Es sei $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ und es seien $a, b \in G$ mit $a \neq b$. Zeigen Sie, daß es eine biholomorphe (konforme und surjektive) Abbildung $f : G \to G$ von G auf sich selbst mit $f(a) = b$ gibt.

c) Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Zeigen Sie, daß es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 6: (H10T3A1)
Sei f eine in einer Umgebung von $\overline{D_2} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ definierte holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \overline{D_2}$. Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt: $|f''(z)| \leq 4$.
Hinweis: Cauchy-Integralformel

Aufgabe 7: (H14T3A5)
Für die holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gelte $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$, so daß $f(z) = \lambda g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 8: (H13T3A4) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige und nichtkonstante Funktion.

a) Die Einschränkung $f|_G$ von f auf G sei holomorph.

   i) Zeigen Sie, $\partial(f(G)) \subseteq f(\partial G)$. (Dabei bezeichnet $\partial A := \overline{A} \backslash \mathring{A}$ den Rand einer Menge $A \subseteq \mathbb{C}$.)

   ii) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $\partial(f(G)) \subsetneq f(\partial G)$.

b) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $f|_G$ unendlich oft reell differenzierbar und $\partial(f(G)) \not\subseteq f(\partial G)$.

Aufgabe 9: (H06T1A4) Zeigen Sie:

a) Ist $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{|h(z)|}{|z|^{n+1}} = 0,$$

so ist h eine komplexe Polynomfunktion vom Grad $\leq n$.

b) Ist $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\operatorname{Re}(h)$ beschränkt, so ist h konstant.

Aufgabe 10: (H06T2A2) Drei Fragen zur Funktionentheorie:

a) Hat jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion?

b) Wo konvergiert die Laurentreihe $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$?

c) Nimmt die komplexe Sinusfunktion jeden Wert an?

Aufgabe 11: (H17T3A5) Sei
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{holomorph.}$$

a) Stellen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$ und $r > 0$ die Koeffizienten a_k der obigen Potenzreihe durch ein Wegintegral über $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ dar. Folgern Sie daraus

$$|a_k| \leq r^{-k} \max\{|f(z)| : |z| = r\}$$

b) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte zusätzlich $\limsup_{|z| \to \infty} |z|^{-n}|f(z)| < \infty$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

c) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun zusätzlich $\liminf_{|z| \to \infty} |z|^{-n}|f(z)| > 0$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\geq n$ ist.