Übungsblatt 3 zu Mathematik II (Naturwissenschaften)

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Überlege zunächst, wie sich die Determinanten der folgenden Matrizen möglichst geschickt bestimmen lassen und berechne diese anschließend.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -i & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1-i & 4-3i & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Entscheide, welches der Gleichungssysteme

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 + 7x_5 + 3x_6 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 + 2x_6 &= 2 \\ -x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 - x_5 + 4x_6 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_6 &= -1 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5 + 3x_6 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_6 &= 0 \end{aligned}$$

eine Lösung besitzt und bestimme gegebenenfalls die Lösungsräume.

Aufgabe 3: (10 Bonuspunkte)
Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ und $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ Basen der $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$ sind.

b) Die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch $F(v_1) = w_4,\; F(v_2) = w_2 + w_3,\; F(v_3) = w_1$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ von F bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_4}(F)$ von F bezüglich der Standardbasen $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{E}_4$ des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 18.5.2022, 12.15 Uhr – in der Vorlesung oder über Uni2work