Übungsblatt 10 zu Mathematik II (Naturwissenschaften)

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Es seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ normierte $\mathbb{K}-$Vektorräume und $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ seien stetig. Zeige, daß für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ dann auch die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \lambda f + \mu g : X & \to & Y \\ x & \mapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array}$$

stetig ist.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der Supremumsnorm $\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2 & \to & [0, \infty[\\ (x, y) & \mapsto & \max\{|x|, |y|\} \end{array}$. Welche der Mengen

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\},$$

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x - 1|, |y + 1|\} < 1\}$$

ist offen? Welche ist eine Umgebung von $(1, -1)$?

Aufgabe 3: (10 Bonuspunkte)
Zeige, daß die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + \frac{x+2}{x^2+y^2+1} \end{array}$$

stetig ist.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 6.7.2022, 12.15 Uhr – in der Vorlesung oder über Uni2work