Übungsblatt 1 zu Mathematik II (Naturwissenschaften)

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Es sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & \cdots & & & & & \\ 0 & & & & 0 & b_{2j_2} & \cdots & & & \\ 0 & & & & & & 0 & b_{3j_3} & \cdots & \\ 0 & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 0 & b_{rj_r} & \cdots \\ 0 & & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_r \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

eine reelle $m \times n-$ Matrix in Zeilenstufenform mit Pivotelementen $b_{1,j_1}, ..., b_{r,j_r}$. Zeige, daß die Zeilenvektoren $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r$ linear unabhängig sind und deshalb

$$\mathrm{ZRang}(B) := \dim_K(\mathrm{lin}\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\}) = r$$

ist.

Aufgabe 2: (15 Punkte)
Überführe die folgenden Matrizen durch elementare Zeilenumformungen in eine Zeilenstufenform und löse die entstehenden homogenen linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: (15 Bonuspunkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis gegeben ist durch $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Zeige, daß $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch 4.5.2022, 12.15 Uhr – in der Vorlesung oder über Uni2work