

Übungsblatt 9 zu Analysis und Lineare Algebra II

Aufgabe 84: (10 Punkte)

Zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8}(1-x)^2 - 1\right)y + \frac{1}{12}xy^2 &= \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8}(1-x)y - \frac{1}{4}y^2 - x &= -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

auf der Menge $M = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [-1, 1]$ genau eine Lösung besitzt. Von $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ startend, wieviele Iterationen sind notwendig, um sicher zu sein, dass sich die Koordinaten der approximativen und tatsächlichen Lösung um weniger als 10^{-6} unterscheiden. Berechne die Approximation nach 2 Iterationsschritten. Hinweis: Verwenden der Maximumsnorm kann die Rechnungen vereinfachen.

Aufgabe 85: (10 Punkte)

Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeige, daß auch

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} k : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \min\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

stetig sind.

Aufgabe 86: (10 Punkte)

Wir versehen \mathbb{C}^2 und $M_2(\mathbb{C})$ mit der jeweiligen Supremumsnorm. Zeige, daß die Funktion

$$\begin{aligned} f : \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| < 1\} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) &\rightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ (w, z) &\mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{w}{z}} & \frac{z}{|w|^2 + |z|^2} \\ z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (w-1)^k & \sin\left(\frac{w+1}{z}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

stetig ist.

Aufgabe 87: (10 Punkte)

Zeige, daß $f : [-2, -1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nullstelle besitzt und bestimme diese bis auf einen Fehler $\leq 0,01$.

$$x \mapsto x^2 + 3 - e^{-x}$$

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Mittwoch 6.7.2022, 14 Uhr – über Uni2work