Übungsblatt 8 zu Analysis und Lineare Algebra II

Aufgabe 80: (10 Punkte)
Es sei (X,d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subseteq X$ und $\emptyset \neq B \subseteq X$ mit $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Zeige, daß es offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$ gibt.
Hinweis: $\begin{array}{rcl} f : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(x,B) \end{array}$ könnte weiter helfen.

Aufgabe 81: (10 Punkte)
Es sei $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_\infty}$ die Normtopologie auf $\mathbb{R}^d$, die von der Supremumsnorm

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^d & \to & [0,\infty[\\ \vec{x} = (x_1, ..., x_d) & \mapsto & \|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_d|\} \end{array}$$

definiert wird. Zeige, daß $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_\infty}$ die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^d = \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{d-mal}$ von d Kopien von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ ist.

Aufgabe 82: (10 Punkte)
Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $f : X \to \widehat{\mathbb{R}}$ und $g : X \to \widehat{\mathbb{R}}$ stetige Funktionen und $A \subseteq X$ sei dicht.

a) Zeige, daß $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

b) Zeige, daß aus $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in A$ dann $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$ folgt.

Aufgabe 83: (10 Punkte)
Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zu $x \in X$ und $r > 0$ sei $\overline{K}(x,r) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ und $\overline{K(x,r)}$ der Abschluß von $K(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$ bezüglich der durch die Metrik induzierten Topologie, $\mathcal{O}_d$.

a) Zeige $\overline{K(x,r)} \subseteq \overline{K}(x,r)$.

b) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so gilt sogar $\overline{K(x,r)} = \overline{K}(x,r)$.

c) Gib ein Beispiel für einen metrischen Raum an mit $\overline{K(x,r)} \neq \overline{K}(x,r)$.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Mittwoch 29.6.2022, 14 Uhr – über Uni2work