Mathematisches Institut der Universität München 15.6.2022

Übungsblatt 7 zu Analysis und Lineare Algebra II

Aufgabe 76: (10 Punkte)
Auf $X := \{\circ, \square, \triangle, \triangledown\}$ ist

$$\mathcal{O}_X := \{\emptyset, X, \{\circ\}, \{\triangle\}, \{\circ, \triangle\}\}$$

offenbar eine Topologie, ebenso ist auf $Y := \{\bullet, \blacksquare, \blacktriangle, \blacktriangledown\}$ durch

$$\mathcal{O}_Y := \{\emptyset, Y, \{\blacktriangledown\}, \{\blacksquare\}, \{\bullet\}, \{\blacktriangledown, \blacksquare\}, \{\blacktriangledown, \bullet\}, \{\bullet, \blacksquare\}, \{\blacktriangledown, \blacksquare, \bullet\}\}$$

eine Topologie auf Y definiert. Die Ausmalfunktion $f : X \to Y$ ist definiert durch $f(\circ) = \bullet$, $f(\square) = \blacksquare$, $f(\triangle) = \blacktriangle$ und $f(\triangledown) = \blacktriangledown$.

a) Bestimme alle Punkte $x \in X$, in denen f stetig (bzgl. $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$) ist.

b) Was ist die gröbste Topologie $\mathcal{O}$ auf X, so daß f bzgl. $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_Y$ stetig ist?

Aufgabe 77: (10 Punkte)
Es sei $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$.

a) Zeige, daß $\mathcal{B} = \{]\alpha, \beta[: \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta\}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ bildet.

b) Zeige, daß $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ die gröbste Topologie auf $\mathbb{R}$ ist, in der für alle $a \in \mathbb{Q}$ die Halbachsen $]-\infty, a[$ und $]a, \infty$ offen sind.

Aufgabe 78: (10 Punkte)
Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ hausdorffsche topologische Räume, $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ stetige Funktionen. Zu $A \subseteq X$ definiere

$$\begin{aligned} h : X &\to Y \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ g(x) & \text{für } x \in X \setminus A \end{cases} \end{aligned}$$

In welchen Punkten ist h stetig?

Aufgabe 79: (10 Punkte)
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Zeige die Äquivalenz von:

a) x ist Häufungspunkt von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (bzgl. der von d definierten Topologie).

b) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine unendliche Menge.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Mittwoch 22.6.2022, 14 Uhr – über Uni2work