Übungsblatt 6 zu Analysis und Lineare Algebra II

Aufgabe 73: (10 Punkte)
Es sei V ein $n-$dimensionaler $\mathbb{C}-$Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_n)$ seien Orthonormalbasen von V. Zeige, daß die darstellende Matrix $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ des „Koordinatenwechsels" von der Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ zur Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ eine unitäre Matrix ist.

Aufgabe 74: (10 Punkte)
Zeige, daß es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ aus gemeinsamen Eigenvektoren zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} + \frac{1+2i}{2\sqrt{5}} & -\frac{i}{2} + \frac{1+2i}{2\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{i}{2} + \frac{1+2i}{2\sqrt{5}} & \frac{i}{2} + \frac{1+2i}{2\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

gibt und berechne eine solche.

Aufgabe 75: (20 Punkte)
Wir versehen $\mathbb{C}$ mit der Standardtopologie und betrachten

$$Y := (\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) \geq 1\}) \cup \left\{ \frac{i}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bestimme

a) den offenen Kern Y° von Y

b) den Abschluß $\overline{Y}$ von Y

c) den Rand ∂Y von Y

d) die Menge aller isolierten Punkte von Y

e) die Menge aller Häufungspunkte von Y.

Hinweis: Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \left(\left\{ \frac{i}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \right)$ gibt es ein $r > 0$ so daß

$$\{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\} \cap \left(\left\{ \frac{i}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \right) = \emptyset$$

gilt.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Mittwoch 15.6.2022, 14 Uhr – über Uni2work