Übungsblatt 5 zu Analysis und Lineare Algebra II

Aufgabe 69: (10 Punkte)

a) Bestimme für ein $2 \times 2-$Kastl $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ einer reellen Jordanform zum Eigenwert $\gamma = a + ib$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$e^{t\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}.$$

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ und

$$J_j(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix} \in M_j(\mathbb{R})$$

ein $j \times j-$Jordankastl zum Eigenwert a. Berechne für ein $2j \times 2j-$Kastl

$$\left(\begin{array}{c|c} J_j(a) & -bE_j \\ \hline bE_j & J_j(a) \end{array}\right) \in M_{2j}(\mathbb{R})$$

einer reellen Jordanform zum Eigenwert $\gamma = a + ib$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$e^{t\left(\begin{array}{c|c} J_j(a) & -bE_j \\ \hline bE_j & J_j(a) \end{array}\right)}.$$

Aufgabe 70: (10 Punkte)
Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine selbstadjungierte Matrix und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^n$.

a) Zeige: $\begin{array}{rcl} s_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C} \\ (\underline{x}, \underline{y}) & \mapsto & \langle \underline{x}, A\underline{y} \rangle \end{array}$ definiert eine hermitesche Sesquilinearform.

b) Unter welchen Bedingungen an die Eigenwerte von A ist s_A ein Skalarprodukt?

Aufgabe 71: (10 Punkte)
Bestimme für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A. Zeige, daß es ein $B \in M_3(\mathbb{R})$ mit $B^3 = A$ gibt.

Aufgabe 72: (10 Punkte)
Bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ bestehend aus Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 7 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Gibt es selbstadjungierte Matrizen $B, C \in M_4(\mathbb{R})$ mit $B^2 = A$ bzw. $C^3 = A$? Wenn ja so gib eine solche an!

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.
Abgabe bis Mittwoch 1.6.2022, 14 Uhr – über Uni2work