Übungsblatt 11 zu Analysis und Lineare Algebra II

Aufgabe 92: (10 Punkte)
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt mit $\emptyset \neq K \subseteq U$ und $U \neq \mathbb{R}^d$. Konstruiere eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty[$ mit $f(x) = 1$ für alle $x \in K$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash U$.

Aufgabe 93: (10 Punkte)
Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein kompakter topologischer Raum, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \to Y$ sei stetig und bijektiv. Zeige, daß dann f ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 94: (10 Punkte) Es seien X und Y zwei homöomorphe topologische Raume – dies bedeutet, daß ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ existiert. Zeige:

a) Zu $x \in X$ sind $X \backslash \{x\}$ und $Y \backslash \{f(x)\}$ homöomorph.

b) X ist zusammenhängend genau dann wenn Y zusammenhängend ist.

c) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph.

Aufgabe 95: (10 Punkte)
Es sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

a) Zeige:

$$V := \{(x, y) \in I \times I : x < y\} \tag{1}$$

ist eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
Anleitung: Fixiere $z = (z_1, z_2) \in V$ und betrachte zu $w = (w_1, w_2) \in V$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha_w : [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto tz + (1-t)w \end{aligned}$$

b) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, daß

i) f ist injektiv

ii) f ist streng monoton

äquivalent sind.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Mittwoch 20.7.2022, 14 Uhr – über Uni2work