Übungsblatt 10 zu Analysis und Lineare Algebra II

Aufgabe 88: (10 Punkte)
Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Zeige, daß die Aussagen

a) X ist zusammenhängend.

b) Aus $A, B \subseteq X$, $X = A \cup B$ und $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ folgt $X = A$ oder $X = B$.

c) Versieht man $\{0,1\}$ mit $\mathcal{P}(\{0,1\})$ als Topologie, so ist jede stetige Funktion $f : X \to \{0,1\}$ konstant.

äquivalent sind.

Aufgabe 89: (10 Punkte)

a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Zeige, daß

$$K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

eine kompakte Teilmenge von X ist.

b) Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq K \subseteq X$ kompakt. Zeige, daß es für jedes $x \in X$ ein $\xi_x \in K$ mit

$$\operatorname{dist}(x, K) := \inf\{d(x, y) : y \in K\} = d(x, \xi_x)$$

gibt.

c) Wir beweisen den Hinweis zu Aufgabe 75. Zeige: Ist $z \in \mathbb{C} \backslash \left(\left\{\frac{i}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}\right)$, so gibt es ein $r > 0$ mit

$$\{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\} \cap \left(\left\{\frac{i}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}\right) = \emptyset$$

Aufgabe 90: (10 Punkte)

a) Zeige, daß der Grenzwert der Reihe $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^4}{k^4x^4 + 16}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine stetige Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^4}{k^4x^4 + 16} \end{aligned}$$

definiert.

b) Zeige, daß

$$\begin{aligned} K \quad := \quad & \left\{\frac{2}{k}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}} : k\in\mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{2}{k}\cdot\frac{-1+i}{\sqrt{2}} : k\in\mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{2}{k}\cdot\frac{-1-i}{\sqrt{2}} : k\in\mathbb{N}\right\} \cup \\ & \left\{\frac{2}{k}\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}} : k\in\mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

kompakt ist.

c) Bestimme die größte offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, so daß für jedes $z \in U$ jede Partialsumme $\sum_{k=1}^{n} \frac{z^4}{k^4 z^4 + 16}$ und der Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^4}{k^4 z^4 + 16}$ existiert und

$$\begin{aligned} g : U &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^4}{k^4 z^4 + 16} \end{aligned}$$

stetig ist.

Aufgabe 91: (10 Punkte)
Zeige die folgende Verallgemeinerung einer Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$: Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A_n \subseteq X$. Für $n \in \mathbb{N}$, gelte:

a) $A_n \neq \emptyset$,

b) A_n abgeschlossen,

c) $A_{n+1} \subseteq A_n$,

d) $\delta(A_n) := \begin{cases} \sup\{d(x,y) : x, y \in A_n\}, & \text{falls } \{d(x,y) : \ x, y \in A_n\} \text{ nach oben beschränkt,} \\ \infty, & \text{sonst,} \end{cases}$
erfüllt $\delta(A_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

dann gibt es genau ein $a \in X$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a\}$.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben. Abgabe bis Mittwoch 13.7.2022, 14 Uhr – über Uni2work