Übungsblatt 1 zu Analysis und Lineare Algebra II

Aufgabe 53: (10 Punkte)

a) Bestimme den Lösungsraum von

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 & = & 1 \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 & = & 2 \end{array}$$

b) Bestimme den Lösungsraum von

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 & = & 1 \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 & = & 3 \end{array}$$

c) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ Bestimme alle $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, für die das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ genau eine Lösung $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ besitzt.

Aufgabe 54: (10 Punkte)

a) Zeige, daß folgende Abbildung, genannt Zeilensummennorm,

$$\begin{array}{rcl} |||\cdot|||_\infty : M(m \times n, \mathbb{R}) & \to & [0, \infty[\\ A = (a_{k,l})_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le l \le n}} & \mapsto & |||A|||_\infty := \max\limits_{k=1,\ldots,m} \sum\limits_{l=1}^{n} |a_{k,l}| \end{array}$$

auf $M(m \times n, \mathbb{R})$ tatsächlich eine Norm definiert.

b) Zeige, daß die Zeilensummennorm durch die Maximumsnorm

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n & \to & [0, \infty[\\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \|\vec{x}\|_\infty := \max\limits_{k=1,\ldots,n} |x_k| \end{array}$$

induziert wird, daß also

$$|||A|||_\infty = \sup\{||A\underline{x}||_\infty : ||\underline{x}||_\infty = 1\}$$

gilt.

Aufgabe 55: (10 Punkte)
Entscheide, welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechne die Determinante und gegebenenfalls die Inversen.

Aufgabe 56: (10 Punkte) Es sei K ein Körper und $x_1, x_2, x_3, x_4 \in K$. Zeige:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq k < l \leq 4} (x_l - x_k)$$

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung abgeben.
Abgabe bis Mittwoch 4.5.2022, 14 Uhr – über Uni2work