

Tutoriumsblatt 9 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 1:

Auf welchem offenen Kreisring konvergiert die Laurentreihe

$$\text{a) } \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} (|k|!)^{-\frac{k}{|k|}} z^k$$

$$\text{b) } \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z-1)^k$$

Aufgabe 2:

Bestimme die Laurentreihenentwicklung von

$$\text{a) } f : \mathbb{C} \setminus \{i, 1\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{um } i \text{ und } 1 \\ z \mapsto \frac{1}{(z-1)(z-i)}$$

$$\text{b) } g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{um } 0. \\ z \mapsto \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\text{c) } h : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{um } 0. \\ z \mapsto \frac{1}{1-z} e^{\frac{1}{z}}$$

Welchen Typ Singularitäten haben f, g und h ? Bestimme die Residuen $\text{Res}(f, i)$, $\text{Res}(f, 1)$, $\text{Res}(g, 0)$, $\text{Res}(h, 0)$ und $\text{Res}(h, 1)$.

Aufgabe 3:

Bestimme alle analytischen Funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \{2\} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$.