

## Tutoriumsblatt 8 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

### Aufgabe 1:

Entscheide, ob es eine nullstellenfreie analytische Funktion  $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $|f(0)| < \min\{|f(z)| : |z| = \frac{1}{2}\}$  gibt und begründe Deine Entscheidung.

### Aufgabe 2:

- a) Welche analytischen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es, die  $|f(z) - 10| \geq \frac{e}{\pi}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  erfüllen?
- b) Welche analytischen Funktionen  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|g(0)| = 1$  und  $|g(z)| \leq \frac{1}{|z|}$  für  $|z| > e$  gibt es?

### Aufgabe 3:

Es sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein beschränktes Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, so daß für jede Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $G$ , die  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \in \partial G$  erfüllt, dann  $|f(z_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  gilt. Zeige, daß  $f$  nicht holomorph ist, durch unterscheiden von:

- (i)  $f$  hat keine Nullstelle in  $G$ .
- (ii)  $f$  hat endlich viele Nullstellen in  $G$ .
- (iii)  $f$  hat unendlich viele Nullstellen in  $G$ .