Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (F21T2A4)
Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichne $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius r. Weiter seien $D_+ := B_{\sqrt{2}}(1)$, $D_- := B_{\sqrt{2}}(-1)$ und $D := D_+ \cap D_-$. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Funktion G zu bestimmen, die D biholomorph auf die Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ abbildet.

a) Begründen Sie, warum es eine solche Funktion G geben muß und warum diese keine Möbiustransformation sein kann.

b) Zeigen Sie: ∂D_+ und ∂D_- schneiden sich in den beiden Punkten i und $-i$ jeweils im Winkel $\frac{\pi}{2}$.

c) Es sei $\begin{array}{rcl} T : \mathbb{C}\backslash\{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{i+z}{i-z} \end{array}$. Zeigen Sie $T(D) = \{re^{i\varphi} : r > 0, \varphi \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\} =: U$.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Bild der Geraden $i\mathbb{R}$ und dann der beiden Kreislinien ∂D_- und ∂D_+ unter der winkeltreuen Möbiustransformation T.

d) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung einer biholomorphen Abbildung h von U auf $B_1(0)$ und leiten Sie hieraus eine explizite Darstellung der gesuchten Funktion G ab.

Aufgabe 26: (H13T3A5)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $z_0 \in G$. Ist die Menge

$$\{f'(z_0) : f : G \to G \text{ holomorph}, f(z_0) = z_0\}$$

beschränkt? Unterscheiden Sie dabei die Fälle $G = \mathbb{C}$ und $G \neq \mathbb{C}$.

Aufgabe 27: (H18T1A4) In dieser Aufgabe bezeichne $H := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$ einen Streifen in $\mathbb{C}$.

a) Geben Sie (mit Begründung) eine holomorphe bijektive Abbildung $g : S \to H$ an.

b) Bestimmen Sie eine holomorphe, bijektive Abbildung $S \to S$ mit $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.