# Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 22:** (F21T3A3) Für $\alpha > 0$ ist die Funktion $\begin{array}{rcl} f_\alpha : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x + \alpha y \end{array}$ gegeben und wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $\begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^{2n} + y^{2n} \end{array}$.

a) Skizzieren Sie die Mengen $M_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_n(x,y) = 1\}$ für $n = 1, 2, 3$ in einem Bild.

b) Begründen Sie, warum $f_\alpha$ auf jedem $M_n$ Maximum und Minimum annimmt.

c) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die entsprechende Lage $(\overline{x}_n, \overline{y}_n)$ des Maximums von $f_\alpha$ unter der Nebenbedingung $g_n = 1$.

d) Bestimmen Sie die Grenzwerte von $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\overline{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Aufgabe 23:** (F21T3A4)
Es seien

$$\begin{array}{rcl} f : [1,\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(\ln(x))}{x} \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} g : [1,\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(e^{-x})}{x} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} h : [1,\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(\pi x)}{x} \end{array}.$$

a) Entscheiden Sie, ob $f$ uneigentlich integrierbar ist.
Nutzen Sie hierfür eine geeignete Substitution unter dem Integral.

b) Entscheiden Sie, ob $g$ uneigentlich integrierbar ist.
Schätzen Sie dazu den Integranden geeignet ab.

c) Begründen Sie, daß $h$ uneigentlich integrierbar ist.

Hinweis: Vergleichen Sie den Integralwert mit der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, wobei $a_k = \int\limits_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx$ gilt oder lösen Sie die Aufgabe durch partielle Integration.

**Aufgabe 24:** (F21T2A1)

a) Zeigen Sie, daß $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ aller Punkte, in denen die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \begin{cases} x\cos(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

differenzierbar ist und berechnen Sie für diese Punkte die Ableitung von $f$. Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig?

c) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$. Skizzieren Sie $D$ und berechnen Sie das Integral $I := \int\limits_D (x^3 + y^2) dx dy$.