

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis**Aufgabe 19:** (F21T1A5)

- a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Lage und die Ordnung der Pole der meromorphen Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$.
- b) Zeigen Sie, daß für $n \geq 2$ gilt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+z^n} dz = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

Hinweis: Betrachten Sie das Wegintegral $\int_\gamma \frac{1}{1+z^n} dz$ für den geschlossenen Weg γ , der von 0 in gerader Linie nach R , von dort auf dem Kreissegment nach $Re^{\frac{2\pi i}{n}}$ und von hier aus in gerader Linie wieder zurück nach 0 verläuft.

Aufgabe 20: (F21T3A1)

Bestimmen Sie die Anzahl (gezählt mit Vielfachheit) von Nullstellen des Polynoms $f(z) = z^6 - z^3 + 1$

- a) in $\mathbb{C}$
- b) in $\mathbb{R}$
- c) im Kreisring $R = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$

Aufgabe 21: (F21T1A2)

- a) Formulieren Sie den Satz von Rouché.
- b) Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$z + e^{-z} = 2021$$

in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ genau eine Lösung besitzt.

- c) Zeigen Sie, daß diese Lösung reell ist.