

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis**Aufgabe 13:** (F04T3A1)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und erfülle

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

- a) Beweisen Sie, daß f in 0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle haben kann.
- b) Geben Sie konkret eine in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion mit dieser Eigenschaft an.

Aufgabe 14: (F03T3A2)

- a) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq 1 + \frac{1}{|z|^2}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß f dann die Form $f(z) = a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit geeigneten Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$ hat.
- b) Es seien $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei g in 0 einen Pol der Ordnung $k > 0$ habe. Es gelte $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß dann $f = g$ ist oder f in 0 eine wesentliche Singularität hat.

Aufgabe 15: (F21T1A1)

Es seien $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto 4x^2 + 9y - \frac{1}{3}y^3$

- a) Skizzieren Sie die Menge D .
- b) Zeigen Sie, daß f auf D ein globales Maximum besitzt.
- c) Bestimmen Sie den Wert dieses globalen Maximums von f sowie sämtliche Stellen, an denen dieser Wert angenommen wird.