Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 7: (F21T2A2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über alle holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet) gelten. Bei richtigen Aussagen geben Sie eine kurze Begründung mit Nennung aller benutzten Sätze an, bei falschen ein Gegenbeispiel. Zur Erinnerung: Ein Gebiet ist eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

a) Ist $G = \mathbb{C}$ und f beschränkt, so ist f konstant.

b) Ist $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und f beschränkt, so ist f konstant.

c) Ist G die offene rechte Halbebene und f beschränkt, so ist f konstant.

d) Ist G ein beschränktes Gebiet und hat f unendlich viele Nullstellen, so ist f konstant.

e) Ist G ein beschränktes Gebiet und hat f unendlich viele Nullstellen in einer kompakten Teilmenge von G, so ist f konstant.

f) Ist G ein beschränktes Gebiet, so ist $f(G)$ beschränkt.

Aufgabe 8: (H13T3A4) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige und nichtkonstante Funktion.

a) Die Einschränkung $f|_G$ von f auf G sei holomorph.

   i) Zeigen Sie, $\partial(f(G)) \subseteq f(\partial G)$. (Dabei bezeichnet $\partial A := \overline{A}\backslash\mathring{A}$ den Rand einer Menge $A \subseteq \mathbb{C}$.)

   ii) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $\partial(f(G)) \subsetneq f(\partial G)$.

b) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $f|_G$ unendlich oft reell differenzierbar und $\partial(f(G)) \not\subseteq f(\partial G)$.

Aufgabe 9: (H18T2A2)

a) (i) Zeigen Sie, daß die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \tag{1}$$

absolut konvergiert für jedes $z \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : z \mapsto f(z)$, die so entsteht, stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Geben Sie (ohne Beweis) die größte offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ an. so daß die Funktion f durch (1) auf U definiert und dort holomorph ist.

b) Die komplexen Zahlen $a_1, ..., a_n$ (mit $n \geq 1$) erfüllen $|a_1| = ... = |a_n| = 1$. Zeigen Sie, daß es einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gibt, so daß das Produkt der Abstände zwischen z und a_j für $j = 1, ..., n$ mindestens 1 ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(z) := (z - a_1) \cdots (z - a_n)$.