# Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 4:** (F12T1A2) Drei Fragen zur Funktionentheorie:

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$, so daß $f(\frac{1}{2}) = 2$ ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so daß für alle $x + iy \in \mathbb{C}$ gilt: $(\operatorname{Im} g)(x + iy) = x^2 - y^2$ ?

c) Gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $h^{(n)}(0) = (-1)^n(2n)!$

**Aufgabe 5:** (F13T2A2) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{-it} \end{array}$.

Weiterhin bezeichne $P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ das $n-$te Taylorpolynom von $f$ mit Entwicklungspunkt 0. Zeigen Sie, daß für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 1$ gilt:

$$P_n(w) = \frac{w^{n+1}}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}(z - w)} dz$$

**Aufgabe 6:** (F11T2A2)
Sei $G$ ein beschränktes nichtleeres Gebiet in $\mathbb{C}$ und seien $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ und $g : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, deren Einschränkungen auf $G$ holomorph sind. Zeigen Sie: Gilt $|f(z)| = |g(z)|$ für alle $z \in \partial G$ und haben $f$ und $g$ keine Nullstellen in $\overline{G}$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, so daß $f = \lambda g$.