Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 37: (F21T1A3) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die skalare gewöhnliche Differentialgleichung

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0 \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen von (1) und bestimmen Sie für alle Lösungen das maximale Existenzintervall.

b) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die es eine nicht konstante periodische Lösung von (1) gibt.

c) Bestimmen Sie nun die Menge aller maximalen Lösungen von

$$x''(t) - x(t) = te^{-t} \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $x(t) = p(t)e^{-t}$ mit einem Polynom höchstens zweiten Grades p, um eine spezielle Lösung zu finden.

Aufgabe 38: (F21T1A4)
Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Geben Sie alle Lösungen mit maximalem Existenzintervall der Differentialgleichung

$$y'(t) + \frac{2t}{1+t^2} y(t) = g(t)$$

an.

b) Zeigen Sie, daß für jede solche Lösung y dieser Differentialgleichung gilt

$$y(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

wenn $\lim\limits_{t\to\infty} tg(t) = 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 39: (F21T2A3) Auf $]0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$x' = (x-2)(x+2)\ln(x)$$

a) Zeigen Sie, daß zu jedem $x_0 > 0$ eine eindeutige maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung zu dem Anfangswert $x(0) = x_0$ existiert. Hierbei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$.

b) Bestimmen Sie alle Anfangswerte, für die die maximale Lösung konstant sind.

c) Bestimmen Sie alle $x_0 > 0$, für die die maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ zum Anfangswert $x(0) = x_0$ streng monoton wächst und alle $x_0 > 0$, für die die maximale Lösung zum Anfangswert $x(0) = x_0$ streng monoton fällt.

d) Sei $x_0 := \frac{1}{2}$ und $x :]a, b[\to \mathbb{R}$ die maximale Lösung zu dem Anfangswert x_0. Bestimmen Sie a, b und die Grenzwerte $\lim\limits_{t \searrow a} x(t)$ und $\lim\limits_{t \nearrow b} x(t)$. Für a ist eine Darstellung als Integral ausreichend.