

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (F19T3A5)

- a) Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x) = 0, x \in \mathbb{R},$$

wobei $y^{(k)}$ die k -te Ableitung von y bezeichnet.

- b) Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x) = 12x + 20 \exp(2x), x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 35: (H05T2A5)

Es sei A eine nilpotente reelle $n \times n$ Matrix mit $A^k = 0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m > k$. Zeigen Sie, daß für eine Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = Ay$ die Asymptotik

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^m} = 0 \tag{1}$$

gilt.

Aufgabe 36: (H13T1A4) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = Ax$$

an. Berechnen Sie auch die Lösung, die der Anfangsbedingung $x(0) = v$ genügt und begründen Sie, warum diese Lösung eindeutig ist.