Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 31: (H13T3A1)
Gegeben sei die parameterabhängige Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^\alpha, \quad x(0) = 1.$$

Bestimmen Sie die maximalen Lösungen dieser Differentialgleichung für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$.

Aufgabe 32: (F15T1A4) Bestimmen Sie eine reelle Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y(x)y'(x) + y(x)^2 + 2x + 5 = 0, \quad y(-4) = -2.$$

Wie groß kann das Intervall I maximal gewählt werden?
Hinweis: Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, zunächst einen integrierenden Faktor $u : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ zu bestimmen, welcher nur von der Variablen x abhängt. Wir bezeichnen hierbei u als integrierenden Faktor, wenn die Differentialgleichung nach Multiplikation mit u exakt wird.

Aufgabe 33: (H15T3A3) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f' = f(f-1)(f+1)$$

für eine reellwertige Funktion f in einer reellen Veränderlichen.

a) Zeigen Sie unter Nennung geeigneter Sätze, daß diese Differentialgleichung für jedes $f_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung f mit $f(0) = f_0$ besitzt.

b) Sei nun $f_0 < 1$. Zeigen Sie, daß für keine reelle Zahl a mit $a > 1$ ein t im Definitionsbereich von f existiert, so daß $f(t) = a$ gilt.

c) Sei $f_0 > 1$. Zeigen Sie, daß für jede reelle Zahl $a > 1$ ein t im Definitionsbereich von f mit $f(t) = a$ existiert.