Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (F17T3A5)
Gegeben sei die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}.$$

Beweisen Sie:

a) f_n konvergiert auf dem offenen Intervall $]0,1[$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen null.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \frac{\pi}{2}$.

c) Für jeden Parameter $\alpha \in]0,1[$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^\alpha f_n(x)dx = 0$

Aufgabe 29: (H18T1A2)
Bezeichne $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x^2\}$ den Definitionsbereich der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x^2 + y^2 + 2y$.

a) Skizzieren Sie die Menge D.

b) Zeigen Sie, daß die Funktion f ein globales Minimum besitzt.

c) Bestimmen Sie das globale Minimum von f sowie alle Stellen in D, bei denen dieses angenommen wird.

Aufgabe 30: (F15T1A5) Bestimmen Sie (mit Nachweis) für jedes $a \in \mathbb{R}$ das globale Minimum der Funktion

$$\begin{aligned} f : H &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x^2 - ax + y^2 \end{aligned}$$

wobei $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$ ist, falls f ein solches Minimum besitzt. Geben Sie in diesen Fällen alle Stellen an, an denen das Minimum angenommen wird.