Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 46: (H11T2A4)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = e^{y(t)}t^3,\ y(0) = y_0.$$

Gibt es Anfangswerte $y_0 \in \mathbb{R}$, so daß die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ existiert?

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) - 3y(t) = te^{4t},\ y(1) = 2.$$

Aufgabe 47: (H11T3A3) Sei $\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & e^{x^2t^2} + t^2 \end{array}$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von F.

b) Bestimmen Sie zu $x_0 \in \mathbb{R}$ alle Lösungen von

$$xt^2x' + t(x^2 + e^{-x^2t^2}) = 0, \quad x(1) = x_0.$$

c) Zeigen Sie, daß jede Lösung aus (b) maximal auf einem beschränkten Zeitintervall existiert und geben Sie das Randverhalten der Lösungen an.

Aufgabe 48: (F09T1A4) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Der topologische Abschluß M der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ sei kompakt. Man zeige:

a) Eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(x), x(0) = x_0$ verläuft für jeden Punkt $x_0 \in M$ vollständig in M.

b) Das Anfangswertproblem $x' = f(x), x(0) = x_0$ ist für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ global lösbar.

Aufgabe 49: (F14T2A1)

$$x' = \frac{xt}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad x(0) = 1 \tag{1}$$

Zeige:

a) Das Anfangswertproblem (1) hat eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$.

b) Für das maximale Lösungsintervall gilt: $I = \mathbb{R}$.

c) Für alle $t \geq 0$ ist $\lambda(t) \in [1, 1 + \frac{t^2}{2}]$.

Aufgabe 50: (H16T1A3) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -\tan(y)e^y, \quad y(0) = -1$$

a) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ besitzt.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.