Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 39: (H15T2A1)
Wir betrachten $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y < 0\} \cup \{(0,0)\}$ und die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (y+1)e^x - e^y \end{array}$$

a) Geben Sie an, welche Punkte in $\mathbb{R}^2$ innere Punkte oder Randpunkte von D sind. Ist D offen oder abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie Gradienten und Hessematrix von f in allen inneren Punkten von D.

c) Welcher Punkt im Inneren von D ist eine lokale Extremstelle von f und von welchem Typ ist er? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Welcher Randpunkt ist eine lokale Extremstelle von f? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 40: (F16T2A4)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel:

a) Stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig.

b) Die Umkehrfunktion $f^{-1} :]c,d[\to]a,b[$ einer stetig differenzierbaren streng monotonen Funktion $f :]a,b[\to]c,d[$ ist ebenfalls stetig differenzierbar.

c) Die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$ ist reell-analytisch und ihre Potenzreihendarstellung bei $x = 0$ besitzt den Konvergenzradius 1.

Aufgabe 41: (F17T1A4)

a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \int\limits_0^{\sin(x)} e^{t^2} dt \end{array}$$

b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & g(z) := \int\limits_0^{\sin(z)} \sqrt{t^4 + 3z^2} dt \end{array}$$

am Punkt $z = \pi$.

Aufgabe 42: (F17T2A1) Für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ seien

$$f_n : [0, \infty[\;\to\; \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) := x^n e^{-nx} \qquad\qquad g_n : [0, \infty[\;\to\; \mathbb{R}, \quad x \mapsto g_n(x) := x^n e^{-x^n}$$

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Untersuchen Sie, ob die Funktionen f_n und g_n auf $[0, \infty[$ Maximum und Minimum annehmen.

b) Zeigen Sie, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, \infty[$ punktweise konvergieren. Bestimmen Sie die jeweilige Grenzfunktion f bzw. g.

c) Welche der Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren auf $[0, \infty[$ gleichmäßig?

Aufgabe 43: (F17T3A3) Gegeben sei die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y^2 \end{array}$. Bestimmen Sie für jedes $r > 0$ die Menge der kritischen Punkte von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = r^2$ und geben Sie jeweils mit Begründung an, ob es sich bei diesen um lokale Maxima oder Minima handelt.

Aufgabe 44: (F17T3A4) Im folgenden sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrable Funktion.

a) Formulieren Sie den Transformationssatz für Integrale im Spezialfall, daß Sie das Integral von $f \circ T$ zurückführen auf das Integral über f, wobei die Transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung ist.

b) Integrieren Sie die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & \dfrac{1}{(1 + (x_1 + x_2)^2)(1 + (2x_1 + 5x_2)^2)} \end{array}$$

über $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 44: (F18T2A3) Seien $R > \rho > 0$. Betrachten Sie die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2, x^2 + y^2 > \rho^2\}.$$

Anschaulich betrachtet ist dies die Menge, die aus einer Kugel mit Radius R durch "Ausbohren" eines Zylinders vom Radius ρ entsteht. Berechnen Sie das Volumen von M.