Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (F03T1A5)
Sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die kompaktifizierte komplexe Ebene und sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ die durch $f(z) := \frac{z}{z-i}$ gegebene gebrochen-lineare Funktion.

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte von f, die Umkehrabbildung f^{-1} und die Bilder bzw. Urbilder von $0, 1, i$ und ∞.

b) Skizzieren Sie das Bild der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) \geq 0\}$, der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) \geq 0\}$ und des offenen Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ unter der Abbildung f.

Aufgabe 35: (F07T3A3)
Sei $G = \mathbb{C} \backslash \{iy : y \in [0, \infty[$ die geschlitzte Ebene und $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ der offene Einheitskreis.

a) Begründen Sie, daß es eine konforme Abbildung $f : G \to \mathbb{E}$ gibt.

b) Geben Sie explizit eine solche Abbildung an.

Aufgabe 36: (F15T1A2) Es sei $Q := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) < 0, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ der offene zweite Quadrant der komplexen Zahlenebene. Bestimmen Sie mit Begründung alle Abbildungen $f : Q \to \mathbb{C}$, die Q biholomorph auf die offene Einheitskreischeibe $\mathbb{E} : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abbilden mit $f(-1+i) = 0$.

Aufgabe 37: (H11T1A2) Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es seien $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$ und es seien $f : \Omega \to \Omega$ und $g : \Omega \to \Omega$ biholomorphe Abbildungen mit $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$. Zeigen Sie $f = g$.

Aufgabe 38: (H13T2A1) Betrachten Sie das Gebiet

$$G := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}.$$

Geben Sie eine biholomorphe Abbildung von G auf die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$$

an. Hinweis: Bilden Sie zunächst G mit einer Möbiustransformation auf den Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}\,(z) < \pi\}$ ab und nutzen Sie dann die Exponentialfunktion.