# Übungen zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 28:** (F19T2A2) Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 4z + z^2 + e^z \end{array}$.

a) Zeigen Sie, daß $f$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ genau eine einfache Nullstelle besitzt.

b) Zeigen Sie, daß es für $f|_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ keinen holomorphen Logarithmuszweig – also kein holomorphes $l : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $e^{l(z)} = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ – gibt.

c) Zeigen Sie, daß es für $f|_{\mathbb{E}}$ keinen holomorphen Zweig der dritten Wurzel – also kein holomorphes $w : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $(w(z))^3 = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ – gibt.

**Aufgabe 29:** (F19T2A5)

a) Gegeben sei die Menge $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq 2|y| \leq x \leq 6\}$. Skizzieren Sie diese Menge in einem kartesischen Koordinatensystem und berechnen Sie den Wert des Integrals $\iint\limits_{\Delta} (x - y)^2 dxdy$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1+z^3}$, wobei der Definitionsbereich durch $D := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1\}$ definiert werde. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_\gamma f(z)dz$ mit $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2e^{it}$. Entscheiden Sie mit Begründung, ob $f$ eine holomorphe Stammfunktion auf $D$ besitzt.

**Aufgabe 30:** (H03T3A2)

a) Zeigen Sie, daß alle Nullstellen des Polynoms $P(z) = 3z^3 + z + i$ in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe liegen.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int\limits_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{e^{iz}}{3z^3 + z + i} dz$

c) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \backslash \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Gibt es eine holomorphe Abbildung $h : D \to \mathbb{C}$ derart, daß $P(z) = e^{h(z)}$ für alle $z \in D$ gilt?

**Aufgabe 31:** (H11T1A3)

a) Es sei $P(z) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_n \neq 0$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und $m \in \{1, ..., n\}$. Für ein $r > 0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| r^k < 2|a_m| r^m.$$

Zeigen Sie, daß $P$ genau $m$ Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ und genau $n - m$ Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r\}$ hat (jeweils mit Vielfachheiten gezählt). Belegen Sie durch ein Beispiel, daß dies im Allgemeinen falsch ist, wenn man nur

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| r^k \leq 2|a_m| r^m$$

voraussetzt.

b) Zeigen Sie, daß

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^5 + 12z^2 + i} dz = \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^5 + 12z^2 + i} dz$$

gilt. (Hinweis: Wenden Sie (a) an.)

**Aufgabe 32:** (F12T1A3) Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, daß es eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{h(z)} = 1 + z^5 + z^{10}$$

für alle $z \in U$ gibt.

**Aufgabe 33:** (F21T3A2)

a) Bestimmen Sie den Wert des komplexen Kurvenintegrals $\int\limits_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{z^2 + 2z + 1} dz$ für die Kurve $\gamma : \begin{array}{rcl} [-3, 3] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 3e^{i\pi t} \end{array}$.

b) Es sei $G := \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 4\}$. Zeigen Sie: Es existiert eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ derart, daß

$$\frac{z-1}{z+1} = e^{h(z)}$$

für jedes $z \in G$ gilt.