

Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 23: (F07T1A5) Es sei $f := \frac{p}{q}$ eine rationale Funktion und es sei der Grad des Nennerpolynoms q um 2 größer als der Grad des Zählerpolynoms p . Zeigen Sie, daß die Summe der Residuen von f verschwindet, dh.

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}(f, a) = 0.$$

Aufgabe 24: (F08T2A4) Berechnen Sie die Integrale

a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos(3\theta)}{2 + \cos(\theta)} d\theta$$

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx$$

Aufgabe 25: (F11T2A3) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Aufgabe 26: (F16T3A2)

a) Zeigen Sie, daß $[0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist.

$$x \mapsto \frac{x}{1 + x^3}$$

b) Berechnen Sie $\int_0^{\infty} \frac{x}{1 + x^3} dx$ unter Verwendung eines geschlossenen Weges, der durch 0 , R und $Re^{\frac{2\pi i}{3}}$ geht.

Aufgabe 27: (H18T3A4) Wir betrachten den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{2i(t-\pi)} & \text{für } t \in [0, \pi] \\ -1 + i + 2e^{4it} & \text{für } t \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Weg γ (entweder in Worten oder mit Hilfe einer Skizze).

b) Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \frac{(z - (2 - i))e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 - 3 + 4i)} dz.$$

Hinweis: Berechnen Sie $(2 - i)^2$.