Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 18: (F15T3A4) Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

a) Es sei $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol 1. Ordnung in 0. Weiter seien $\alpha \in]0, 2\pi[$, $\varepsilon > 0$ und $\gamma_\varepsilon : \begin{array}{rcl} [0,\alpha] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \varepsilon e^{it} \end{array}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(\xi) d\xi = i\alpha \mathrm{Res}(f, 0).$$

b) Die stetige Funktion $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ sei holomorph in $\mathbb{D}$. Ferner seien $m_1, m_2 \in]0, \infty[$, derart, daß für alle $\xi \in \partial\mathbb{D}$ gilt:

$$|f(\xi)| \leq m_1 \text{ für } \mathrm{Im}\,(\xi) \geq 0 \quad \text{ und } \quad |f(\xi)| \leq m_2 \text{ für } \mathrm{Im}\,(\xi) \leq 0.$$

Beweisen Sie, daß $|f(0)| \leq \sqrt{m_1 m_2}$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(z)f(-z)$.

Aufgabe 19: (F17T2A5) Sei $U := \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit folgenden Eigenschaften:

a) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$

b) f ist auf $\{x \in U : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ unbeschränkt und auf $\{x \in U : |x_1| \leq 1, x_2 = 0\}$ beschränkt.

Zeigen Sie, daß es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Aufgabe 20: (F16T1A1)

a) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, welche in den Punkten -1 und 1 wesentliche Singularitäten mit den Residuen

$$\mathrm{Res}(f, -1) = -1, \quad \mathrm{Res}(f, 1) = 1$$

besitzt. Ist f durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt?

b) Sei f die in (a) gefundene Funktion. Für $\alpha \in [0, \infty[$ sei γ_α der geschlossene Weg, der die Punkte

$$2 + \alpha i, -2 - i, -2 + i.2 - \alpha i, 2 + \alpha i$$

in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet. Für welche Werte von α ist das komplexe Wegintegral

$$\int\limits_{\gamma_\alpha} f(z) dz$$

definiert? Berechnen Sie das Integral für diese Werte von α.

Aufgabe 21: (F14T3A2) Es seien $f : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}$ holomorph, f habe in i einen Pol und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$f\left(i + \frac{1}{n}\right) = g\left(i + \frac{1}{n}\right).$$

Zeigen Sie: Entweder ist $f = g$ oder es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i = \lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)$.
(Hinweis: Untersuchen Sie den Typ der Singularität von g im Punkt i.)

Aufgabe 22: (F09T3A5) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeigen Sie, daß f eine nicht konstante affine Funktion ist, dh es gibt $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ und $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Hinweis: Untersuchen Sie die Art der Singularität von f in ∞.