Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (H17T3A5) Sei $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k \end{array}$ holomorph.

a) Stellen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$ und $r > 0$ die Koeffizienten a_k der obigen Potenzreihe durch ein Wegintegral über $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ dar. Folgern Sie daraus

$$|a_k| \leq r^{-k} \max\{|f(z)| : |z| = r\}$$

b) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte zusätzlich $\limsup\limits_{|z|\to\infty} |z|^{-n}|f(z)| < \infty$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

c) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun zusätzlich $\liminf\limits_{|z|\to\infty} |z|^{-n}|f(z)| > 0$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\geq n$ ist.

Aufgabe 14: (F19T1A5)

a) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 = 1 + i$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

b) Es sei $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ und es seien $a, b \in G$ mit $a \neq b$. Zeigen Sie, daß es eine biholomorphe (konforme und surjektive) Abbildung $f : G \to G$ von G auf sich selbst mit $f(a) = b$ gibt.

c) Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Zeigen Sie, daß es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 15: (F12T3A2) Sei $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}\backslash\{1,2\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{(z-1)(2-z)} \end{array}$.

a) Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

b) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

c) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

d) Zwei reelle Zahlen $a \neq b$ erfüllen $1 < a, b < 2$. Betrachten Sie die Ellipse $E = \gamma([0, 2\pi])$, wobei $\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & a\cos(t) + ib\sin(t) \end{array}$ ist. Berechnen Sie

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

Aufgabe 16: (H14T3A3) Gegeben sei eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ mit einer Nullstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ in z_0 durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung der Funktion $\frac{1}{f}$ um z_0 an.

b) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurent-Entwicklung der Funktion $z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ jeweils um $z_0 = 0$ und $z_0 = \pi$.

c) Sei Γ die Kreislinie $|z - \frac{3}{2}| = 2$ orientiert im positiven Sinn. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sin(z)}$$

Aufgabe 17: (F19T2A1) Es sei
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{-i, i, 0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} + \exp\left(\frac{z-i}{z^2+1}\right) \end{array}$$

a) Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularität von f bei $i, 0$ und $-i$ und berechnen Sie die Residuen $\mathrm{Res}(f, i), \mathrm{Res}(f, 0)$ und $\mathrm{Res}(f, -i)$ von f bei $i, 0$ und $-i$.

b) Weiter sei $\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C}\backslash\{-i, i, 0\} \\ t & \mapsto & 2e^{-2it} \end{array}$. Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)dz$.