Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 6: (H10T3A1)
Sei f eine in einer Umgebung von $\overline{D_2} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ definierte holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \overline{D_2}$. Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt: $|f''(z)| \leq 4$.
Hinweis: Cauchy-Integralformel

Aufgabe 7: (F14T2A3)
Berechnen Sie für $\begin{array}{rcl}\gamma : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 2e^{2it}\end{array}$ und $\begin{array}{rcl}\eta : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & i + e^{-it}\end{array}$ die Kurveninte-grale:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz^2} - 1}{z^2} dz$

b) $\displaystyle\int_\eta \frac{e^z}{(z - i)^3} dz$

c) $\displaystyle\int_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz.$

Aufgabe 8: (H15T3A4)

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Für ein $M \in \mathbb{R}^+$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte

$$|f(z| \leq M|z|^\alpha$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > \alpha$; hierbei ist $f^{(0)} = f$ und $f^{(n)}$ die $n-$te Ableitung von f.

b) Es sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $p^{(n)}(0) = 0$ für alle $n > n_0$. Zeigen Sie: p ist ein Polynom vom Grad $\leq n_0$.

c) f erfülle die Voraussetzungen von Aufgabenteil (a). Zeigen Sie: f ist entweder konstant oder hat mindestens eine Nullstelle.

Aufgabe 9: (F20T3A3) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Auusagen:

a) Jede holomorphe Funktion $f : B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| = 1$ für alle $z \in B_1(0)$ ist konstant.

b) Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z + i) = f(z) = f(z + 1)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist konstant.

c) Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(k) = f(ik) = f(0)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist konstant.

Aufgabe 10: (F15T3A5)
$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

a) Zeigen Sie: Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(z)^3 = z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, die den beiden Bedingungen $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt = 1$$

genügt?
Hinweis: Maximumsprinzip für $\frac{1}{f}$ bzw. Minimumsprinzip für f.

Aufgabe 11: (H19T3A3)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville über ganze Funktionen.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Ist der Imaginärteil $\mathrm{Im}\,(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 12: (H19T1A3)

a) Sei $B(0, \frac{3}{2})$ die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius $\frac{3}{2}$ in der komplexen Ebene. Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : B(0, \frac{3}{2}) \to \mathbb{C}$, die in allen $n \in \mathbb{N}$ die Werte $f\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{2n}{2n+1}$ annehmen.

b) Formulieren Sie das Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete (auch Randmaximumsprinzip für holomorphe Funktionen genannt) und beweisen Sie damit folgende Aussage: Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ bezeichne $B(c, r)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r in der komplexen Ebene. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Gebiet und $B = B(c, r)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{B} \subseteq D$. Weiter sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\min\{|f(z)| : z \in \partial B\} > |f(c)|.$$

Dann besitzt f eine Nullstelle in B.