Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 63: (H18T2A5) Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 - y. \end{aligned}$$

Man zeige, daß dieses System den Nullpunkt als einzige Ruhelage hat und daß die Nullösung stabil ist.
Hinweis: Man suche eine Ljapunov-Funktion der Form $V(x,y) = \alpha x^4 + \beta y^2$ mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$. Zur Erinnerung: Eine Ljapunov-Funktion für das Vektorfeld $f(x,y)$ auf $\mathbb{R}^2$ ist eine stetig differenzierbare Funktion $V(x,y)$, die längs jedes Integralkurve von f fällt, dh. $\langle \mathrm{grad} V(x,y), f(x,y)\rangle \leq 0$.

Aufgabe 64: (F13T1A5) Es sei das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y + 3 \\ \dot{y} &= x^2 - 4y - 20 \end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte des Systems.

b) Untersuchen Sie die stationären Punkte durch Linearisieren auf Stabilität.

Aufgabe 65: (F08T3A5) Gegeben sei das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + x^2 + y^2 \\ bx - y + xy \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq 0$.

a) Man zeige, daß im Fall $a < 0$ die Nullage asymptotisch stabil ist.

b) Man beweise oder widerlege, daß die Behauptung in a) auch im Fall $a = 0$ gilt.

Aufgabe 66: (F11T2A5) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2e^{2t} y \\ \dot{y} &= -2y \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

b) Geben Sie alle Ruhelagen des Systems an und untersuchen Sie diese auf Attraktivität.

Aufgabe 67: (F20T2A5) Untersuchen Sie für jeden Parameterwert $a \in \mathbb{R}$ die Stabilitätseigenschaften der Ruhelage $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_1 + x_2 + (a+1)x_1^2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + ax_2 \end{array} .$$

Aufgabe 69: (F16T2A2) Zeigen Sie, daß das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin(x)$$

auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^2$

1. für alle Anfangswerte $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $\phi_{z_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ besitzt.

2. Zeigen Sie, daß die Funktion $\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{y^2}{2} - \cos(x) \end{array}$ eine Erhaltungsgröße ist, also entlang der Lösungskurven ϕ_{z_0} konstant ist.

3. Bestimmen Sie, ob die Gleichgewichtslage $0 \in \mathbb{R}^2$ stabil oder sogar asymptotisch stabil ist.