Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 57: (F21T2A5) Gegeben sei die Menge

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(y^2 - x) = 0\}$$

und die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2\backslash S & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{2y} + \dfrac{x^3}{y(y^2-x)} \end{array}$ zusammen mit dem Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

wobei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\backslash S$ zu wählen ist.

a) Fertigen Sie eine beschriftete Skizze der Menge S an und begründen Sie, warum (1) für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\backslash S$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt.

b) Sei $y : I \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung von (1) und $\begin{array}{rcl} E : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (y^2-x)^2 - x^4 \end{array}$.
Zeigen Sie, daß die Abbildung $\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & E(x, y(x)) \end{array}$ konstant ist.

c) Sei $x_0 = 0$. Bestimmen Sie die Menge der $y_0 > 0$, für die die maximale Lösung von (1) auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Aufgabe 58: (F09T2A1) Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -y + x\sin(x^2 + y^2) \qquad (2) \\ y' &= x + y\sin(x^2 + y^2) \qquad (3) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle periodischen Orbits.

b) Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Hinweis: Man transformiere auf Polarkoordinaten. Zunächst bestimme man eine Differentialgleichung für $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Aufgabe 59: (F09T3A3) Gegeben sei die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = 2x - 4x^3$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen dieser Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße (ein erstes Integral) für diese Differentialgleichung.

c) Zeigen sie, daß alle maximalen Lösungen dieser Gleichung auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

d) Skizzieren Sie das Phasenportrait für diese Differentialgleichung. Begründen Sie mit dessen Hilfe, welche der stationären Lösungen stabil, welche instabil sind. Besitzt die Differentialgleichung nicht konstante, periodische Lösungen?

Aufgabe 60: (F10T2A5) Betrachten Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(\lambda - (x_1^2 + x_2^2)^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(\lambda - (x_1^2 + x_2^2)^2)\end{aligned}$$

mit einem positiven Parameter $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie mithilfe von Polarkoordinaten $x_1 = r\cos(\varphi)$, $x_2 = r\sin(\varphi)$ alle periodischen Lösungen sowie deren (minimale) Periode $T > 0$.

b) Bestimmen Sie für jede Lösung des Systems den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)|$.

Aufgabe 61: (F21T3A5) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = v(x(t)), x(0) = \overline{x} \in \mathbb{R}^2$$

für das gegebene Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1^5 \\ x_1^4 x_2 + x_1^2 \cos(\frac{1}{x_1}) \end{pmatrix} \qquad \text{für } x_1 \neq 0$$

sowie $v(0, x_2) = 0$ für $x_2 \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, daß v stetig ist.

b) Geben Sie die erste Komponente $x_1(t)$ der Lösung $x : I \to \mathbb{R}^2$ explizit an.

c) Zeigen Sie, daß

$$\Gamma = \left\{ \left(r, \frac{1}{r} \sin \frac{1}{r} \right) : r > 0 \right\}$$

die Trajektorie zum Anfangswert $\overline{x} = (\frac{1}{\pi}, 0)$ ist.

d) Begründen Sie, daß alle Fixpunkte von v instabil sind.

Aufgabe 62: (F18T3A2)

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xe^{x-y^2} \end{aligned}$.

(b) Zeigen Sie, daß alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = 2xy \tag{4}$$
$$\dot{y} = 1 + x \tag{5}$$

stabil sind. Verwenden Sie dazu das Resultat aus (a).